NOMS Prénoms des élèves du groupe :

-
-
-
-

Travail de groupe n$^{\text{o}}$ 6

1 heure

	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3-A	Exercice 3-B	Exercice 3-C	BONUS	Tenue du groupe
Total	3	7	4	2	3	2	1

Exercice 1

Une ville possède un réseau de vélos en libre service dont deux stations A et B se situent en haut d'une colline. On admet qu'aucun vélo des autres stations n'arrive en direction des stations A et B.

On constate pour chaque heure n qu'en moyenne :

- 20 % des vélos présents à l'heure $n-1$ à la station A sont toujours à cette station.

60 % des vélos présents à l'heure $n-1$ à la station A sont à la station B et les autres sont dans d'autres stations du réseau ou en circulation.

- 10 % des vélos présents à l'heure $n-1$ à la station B sont à la station A, 30 % sont toujours à la station B et les autres sont dans d'autres stations du réseau ou en circulation.
- Au début de la journée, la station A comporte 50 vélos, la station B 60 vélos.

Au bout de n heures, on note a_n le nombre moyen de vélos présents à la station A et b_n le nombre moyen de vélos présents à la station B. On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et donc $U_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice M telle que $U_{n+1} = M \times U_n$.
2. Déterminer U_1 et U_2.
3. Au bout de combien d'heures reste-t-il un seul vélo dans la station A ? (on utilisera la calculatrice pour justifier la réponse).

Exercice 2

On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires.

On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U à la fin du n-ième tirage.

1.(a) Traduire par une phrase la probabilité $P_{\{X_n=1\}}\left(X_{n+1}=1\right)$ puis déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{\{X_n=0\}}\left(X_{n+1}=1\right), P_{\{X_n=1\}}\left(X_{n+1}=1\right) \text{ et } P_{\{X_n=2\}}\left(X_{n+1}=1\right)$$

(b) Exprimer $P\left(X_{n+1}=1\right)$ en fonction de $P\left(X_n=0\right)$, $P\left(X_n=1\right)$ et $P\left(X_n=2\right)$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note :

$$R_n=\begin{pmatrix}P\left(X_n=0\right) & P\left(X_n=1\right) & P\left(X_n=2\right)\end{pmatrix} \text{ et } M=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

On note R_0 la matrice ligne $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et on admet que, pour tout entier naturel n, $R_{n+1}=R_n\times M$.

(a) Déterminer R_1

(b) Justifier que, pour tout entier naturel n, $R_n=R_0\times M^n$.

3.(a) On admet que $M=P\times D\times P^{-1}$ avec : $P=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Donner à l'aide de la calculatrice P^{-1}.

(b) On admet que, pour tout entier naturel n, $M^n=P\times D^n\times P^{-1}$.

Exprimer D^n en fonction de n.

4.(a) Déterminer $D^n\times P^{-1}$ en fonction de n.

(b) Calculer R_0P.

(c) En déduire les coefficients de R_n en fonction de n.

5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(X_n=0\right)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(X_n=1\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(X_n=2\right)$.

Interpréter ces résultats.

Exercice 3
Partie A : préliminaires

1.(a) Soient n et N deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que :

$$n^2 \equiv N - 1 \quad \text{modulo } N$$

Montrer que : $n \times n^3 \equiv 1 \quad \text{modulo } N$.

(b) Déduire de la question précédente un entier k_1 tel que : $5k_1 \equiv 1 \quad \text{modulo } 26$.

On admettra que l'unique entier k tel que : $0 \leqslant k \leqslant 25$ et $5k \equiv 1 \quad \text{modulo } 26$ vaut 21.

2. On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer la matrice $6A - A^2$.

(b) En déduire que A est inversible et que sa matrice inverse, notée A^{-1}, peut s'écrire sous la forme $A^{-1} = \alpha I_2 + \beta A$, ou α et β sont deux réels que l'on déterminera.

(c) Vérifier que : $B = 5A^{-1}$.

(d) Démontrer que si $AX = Y$, alors $5X = BY$.

Partie B : procédure de codage

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

- Le mot à coder est remplacé par la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, où x_1 est l'entier représentant la première lettre du mot et x_2 l'entier représentant la deuxième, selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- La matrice X est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.
- La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.
- Les entiers r_1 et r_2 donnent les lettres du mot codé, selon le tableau de correspondance ci-dessus.

Exemple : « OU »(mot à coder) $\to X \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} \to Y = \begin{pmatrix} 76 \\ 82 \end{pmatrix} \to R = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} \to$ « YE » (mot codé).

Partie C : procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.

1. Démontrer que : $\left\{\begin{array}{rcl} 5x_1 & = & 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 & = & -3y_1 + 4y_2 \end{array}\right.$.
2. En utilisant la question 1. b. de la **partie A**, établir que :

$$\left\{\begin{array}{rcll} x_1 & \equiv & 16y_1 + 5y_2 & \text{modulo } 26 \\ x_2 & \equiv & 15y_1 + 6y_2 & \text{modulo } 26 \end{array}\right.$$

3. Décoder le mot « QP ».

BONUS

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_n$

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.